في الحلقة المولدة دائماً لازم يكون منها $\emptyset$

م 4 (٤)

تمرين: لتكن المجموعة $X=\{1,2,3,4\}$

ولتكن الصفين $H_1=\{\{1\}\}\subset 2^X$, $H_2=\{\{1\},\{2\}\}\subset 2^X$

المطلوب: (1) هل يشكل H_1, H_2 حلقة أو جبر أو σ-حلقة على X ؟

(2) ما هي الحلقة و σ الحلقة المولدة لكل منها ؟

(3) ما هو الجبر و σ-الجبر وصف دنكين المولد بالصفين ؟

الحل: 1) لدينا $H_1=\{\{1\}\}$

H_1 لا يشكل حلقة على X لأن $\emptyset\notin H_1$

وبالتالي فإن H_1 لا يشكل جبر ولا يشكل σ-حلقة

كذلك فإن H_2 لا يشكل حلقة أو جبر أو σ-حلقة

(2) الحلقة المولدة و σ الحلقة المولدة:

$R(H_1)=\{\emptyset,\{1\}\}=R_\sigma(H_1)$ (دائماً)

$R(H_2)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}=R_\sigma(H_2)$ (دائماً)

(3) الجبر المولد و σ-الجبر المولد:

$A(H_1)=\{\emptyset,\{1\},\{2,3,4\},X\}=F_\sigma(H_1)$

$A(H_2)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\},\{2,3,4\},\{1,3,4\},\{3,4\},X\}=F_\sigma(H_2)$

صف دنكين المولد:

$D(H_1)=F_\sigma(H_1)=\{\emptyset,\{1\},\{2,3,4\},X\}$

$D(H_2)=F_\sigma(H_2)=\{\emptyset,\{1\},\{2,3,4\},\{1,2\},\{1,3,4\},\{3,4\},X\}$

تمرين (2) اثبت ان جبر بوريل B_R يمكن توليده لكل من الصفوف التالية:

$I_1=\{\,]a,b[\;: a,b\in\mathbb{R}, a<b\}$

$I_2=\{[a,b] : a,b\in\mathbb{R}, a<b\}$

$I_3=\{\,]a,b] : a,b\in\mathbb{R}, a<b\}$

$I_4=\{[a,b[\;: a,b\in\mathbb{R}, a<b\}$

$I_5=\{\,]a,+\infty[\;: a\in\mathbb{R}\}$

$I_6=\{[a,+\infty[\;: a\in\mathbb{R}\}$

Subject: .... Date: / /

أي جوار ما لـ $f(x_0)$ يوجد

$I_7 = \{]-\infty, b[\; ; \; b \in \mathbb{R} \}$

$I_8 = \{]-\infty, b] : b \in \mathbb{R} \}$

(2) اثبت ان كل مجموعة وحيدة العنصر هي مجموعة بوريلية.

" " " منتهية " "

" كل مجموعة عددة " "

الحل نعلم ان جبر بوريل $B\mathbb{R}$ هو σ-الجبر المولد لصف المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$.

$B\mathbb{R} = F_\sigma(O)$

(1) بما ان كل مجال مفتوح هو مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ فإن $]a,b[$ مجموعة بوريلية أي أن

$]a,b[\in B\mathbb{R}$ وبالتالي $I_1 \subset B\mathbb{R}$ لذلك $F_\sigma(I_1) \subset B\mathbb{R}$ (I)

وبما أن كل مجموعة مفتوحة E تكتب بشكل اجتماع عدد لمجالات مفتوحة $E = \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n[$

$\underbrace{\in I_1}_{} \to \in F_\sigma(I_1)$

وبالتالي فإن $O \subset F_\sigma(I_1)$ لذلك يكون

$B\mathbb{R} = F_\sigma(O) \subset F_\sigma(I_1)$ (II)

$B\mathbb{R} = F_\sigma(I_1)$

من (I)، (II) نجد أن:

من أجل الصف I_2 لدينا مايلي:

نكتب المجال المغلق $[a,b]$ بالشكل $[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[}_{\in I_1, \; \in F_\sigma(I_1) = B\mathbb{R}} \in B\mathbb{R}$

وهذا يعني أن كل مجال مغلق هو مجموعة بوريلية ومن ثم يكون $I_2 \subset B\mathbb{R}$ وبالتالي

$F_\sigma(I_2) \subset B\mathbb{R}$ III نكتب المجال المفتوح بشكل اجتماع

$]a,b[= \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]}_{\in I_2 \to \in F_\sigma(I_2)} \in F_\sigma(I_2)$

ومن ذلك ينتج أن $I_1 \subset F_\sigma(I_2)$

وبالتالي $B\mathbb{R} = F_\sigma(I_1) \subset F_\sigma(I_2)$ (IV)

من (III) و (IV) ينتج $B\mathbb{R} = F_\sigma(I_2)$

من أجل الصف I_3 لدينا مايلي:

لنكتب $]a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}]a, b+\frac{1}{n}[$

$\in I_1 \rightarrow \in F_\sigma(I_1) = B\mathbb{R}$

اي ان كل مجال نصف مفتوح $]a,b]$ هو مجموعة بوريلية وبالتالي يكون $I_3 \subset B\mathbb{R}$

وبالتالي $F_\sigma(I_3) \subset B\mathbb{R}$ (V)

ليكن $]a,b[\in I_1$ ، لنكتب

$$]a,b[= \bigcup_{n=1}^{\infty}]a, b-\frac{1}{n}] \in F_\sigma(I_3)$$

$\in F_\sigma(I_3) \leftarrow \in I_3$

لذلك يكون $I_1 \subset F_\sigma(I_3)$

وبالتالي $B\mathbb{R} = F_\sigma(I_1) \subset F_\sigma(I_3)$ (VI)

من (V) و (VI) نجد أن

$$B\mathbb{R} = F_\sigma(I_3)$$

وبشكل مشابه نثبت أن

$$B\mathbb{R} = F_\sigma(I_4) = F_\sigma(I_5) = F_\sigma(I_6) = F_\sigma(I_7) = F_\sigma(I_8)$$

(٢) من الطلب الأول فإن كل من المجالات

$$]a,b[, [a,b],]a,b], [a,b[$$

هو مجموعة بوريلية

لتكن $A = \{a\}$ مجموعة وحيدة العنصر عندئذ يمكن ان نكتب

$\{a\} = \{a,b\} \setminus]a,b] \in B\mathbb{R}$

$\in B\mathbb{R} \quad \in B\mathbb{R}$

اي ان كل مجموعة وحيدة العنصر هي مجموعة بوريلية .

لتكن $B = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$ مجموعة منتهية عندئذ :

$B = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \dots \cup \{x_n\} \in B\mathbb{R}$

$\in B\mathbb{R} \quad \in B\mathbb{R} \quad \in B\mathbb{R}$

الآن لتكن $C = \{x_1, x_2, \dots\}$ مجموعة معدودة عندئذ :

$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\} \in B\mathbb{R}$

$\in B\mathbb{R}$

إضافة لذلك فإن $\mathbb{R}$ مجموعة بوريلية لأن $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty}]-n, +n[\in B\mathbb{R}$

$\in B\mathbb{R}$

وكذلك $\emptyset \in B\mathbb{R}$